

## Systèmes thermo-acoustiques de transfert de chaleur : répartition interne de température en régime transitoire.

Pierrick Lotton<sup>(1)</sup>, Michel Bruneau<sup>(1)</sup>, Philippe Blanc-Benon<sup>(2)</sup>, Vitaly Gusev<sup>(1)</sup>, Mikhail Mironov<sup>(3)</sup>,  
Gäelle Poignand<sup>(1)</sup>

(1) Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine (UMR-CNRS 6613),  
72 085 Le Mans cedex 09

(2) Laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Acoustique (UMR-CNRS 5509),  
Ecole Centrale de Lyon, Ecully

(3) Andreev Acoustics Institute, Russian Academy of Sciences,  
Moscou, Russie  
[pierrick.lotton@univ-lemans.fr](mailto:pierrick.lotton@univ-lemans.fr)

### Résumé :

*L'objet des travaux présentés ici porte sur l'étude théorique et expérimentale de l'évolution en régime transitoire de la distribution de température au cœur d'un réfrigérateur thermoacoustique. Un modèle analytique de ce comportement est présenté, dans le cadre d'une théorie linéaire. Il prend en compte les effets des différents flux de chaleur présents dans l'empilement. Ce modèle analytique permet d'interpréter de façon quantitative, après ajustement réaliste de paramètres inconnus, le comportement transitoire d'un prototype expérimental de réfrigérateur thermoacoustique.*

### Abstract :

*The present paper is aimed at providing an experimental and theoretical study of the transient behaviour of a thermoacoustic refrigerator. A theoretical model is presented which takes into account the effects of thermoacoustic heat flux, conductive heat flux, heat generated by viscous losses in the stack and heat leakages through the stack. The agreement between the experimental and theoretical values of the transient and the stationary temperature profile shows that this analytical model conveys an interpretation of the physical phenomena.*

### Mots-clefs : thermoacoustique, régime transitoire

## 1 Introduction

La compréhension des phénomènes qui prennent place dans les systèmes thermoacoustiques réfrigérants atteint aujourd'hui un niveau qui permet d'envisager en pratique des développements susceptibles de répondre à des applications importantes, allant de la cryogénie à l'évacuation de la chaleur dans les micro-composants électroniques. L'estimation des performances de ces systèmes repose essentiellement sur la théorie linéaire en régime stationnaire de la thermoacoustique, établie depuis plus d'une décennie, qui éclaire largement les processus mis en jeu dans ces machines, mais dont les résultats ne permettent pas de traduire réellement ceux qui résultent de l'observation en laboratoire. Des investigations sont poursuivies dans diverses directions pour tenter d'améliorer cette modélisation en usage : citons plus particulièrement celles qui introduisent les effets non linéaires associés aux niveaux sonores élevés, les effets de bord qui sont à l'origine de mouvements particuliers complexes (turbulences) et de non linéarités thermiques, les conséquences des gradients thermiques non uniformes et de leur évolution dans le temps. L'objet de l'étude présentée ici entre dans le cadre de ces investigations destinées à approfondir la compréhension des phénomènes observés et porte plus particulièrement sur l'interprétation théorique du comportement en régime transitoire des réfrigérateurs thermoacoustiques.

Dans un réfrigérateur thermoacoustique classique, l'empilement de plaques (ou tout autre poreux équivalent), siège du processus thermoacoustique proprement dit, est placé dans un champ acoustique résonnant stationnaire de telle sorte qu'un flux de chaleur est généré le long de cet empilement. En régime permanent, un écart de température  $\Delta T$  est obtenu entre les deux extrémités de l'empilement. La valeur théorique de cet écart de température peut être estimée à partir de la théorie linéaire classique de la thermoacoustique, en faisant l'hypothèse qu'en régime établi, le flux de chaleur créé par le processus thermoacoustique le long de l'empilement est entièrement compensé par le flux de chaleur dû à la conduction thermique retour dans les plaques de l'empilement et dans le fluide compris entre ces plaques. Dans ces conditions, la distribution de température atteinte en régime permanent le long de l'empilement est considérée comme linéaire. La valeur théorique obtenue pour l'écart de température  $\Delta T$  est généralement surestimée, et son expression doit alors être corrigée d'un coefficient phénoménologique pour correspondre aux résultats expérimentaux. Les causes de cette différence doivent certainement être recherchées dans les processus complexes d'échanges thermiques qui prennent place au niveau de l'empilement d'un système thermoacoustique. Ainsi, l'étude théorique du régime transitoire, et la comparaison avec les données expérimentales et numériques disponibles dans la littérature, devraient apporter des éléments de réponse.

Un modèle analytique du comportement en régime transitoire d'un réfrigérateur thermoacoustique est présenté dans ce papier, dans le cadre d'une théorie linéaire. Il prend en compte les effets dus au flux de chaleur thermoacoustiquement induit et au flux de chaleur par conduction retour, mais aussi les effets dus aux fuites thermiques à travers les parois du résonateur et aux extrémités de l'empilement et ceux dus aux pertes visqueuses dans l'empilement.

## 2 Modèle de comportement transitoire

Le système étudié (Figure 1) est composé d'une source acoustique (haut-parleur) couplée à un résonateur demi onde de longueur  $L + x_0$ , à l'intérieur duquel est placé un empilement de plaques parallèles de longueur  $\ell$ , d'épaisseur  $2e_s$  et espacées les unes des autres d'une distance  $2y_0$ . Dans le cadre de cette étude, l'empilement ne comporte pas d'échangeurs de chaleur à ses extrémités.

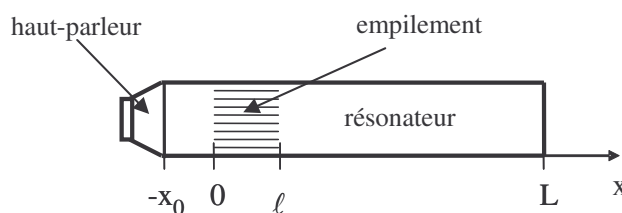


Fig. 1 - Réfrigérateur thermoacoustique constitué d'un haut-parleur couplé à un résonateur demi-onde contenant un empilement de plaques parallèles.

Le comportement thermique transitoire d'un réfrigérateur thermoacoustique est considéré ici comme l'effet résultant de la superposition de quatre phénomènes de transport de chaleur : i - le flux de chaleur hydrodynamique dû à l'effet thermoacoustique et responsable d'un gradient de température le long de l'empilement, qui s'écrit, par unité de surface et en moyenne sur une période acoustique,

$$Q_{th}(x,t) = q(x) - r(x) \frac{\partial \theta(x,t)}{\partial x}, \quad (3)$$

où  $\theta(x,t) = T_m - T_\infty$  est la différence de température entre la température moyenne dans l'empilement  $T_m$  et la température ambiante à l'extérieur du résonateur  $T_\infty$ , et où les coefficients  $q(x)$  et  $r(x)$  font intervenir, entre autres, les amplitudes de la pression acoustique  $p(x)$  et de la composante suivant  $x$  de la vitesse particulaire  $v_x(x,y)$  entre deux plaques de l'empilement (Swift, 1998), ii – les fuites thermiques à travers les parois du résonateur, qui s'écrivent, par unité de surface,

$$Q_L = -h_L \theta(x), \quad (4)$$

avec  $h_L$  un coefficient d'échange thermique inconnu, iii – la quantité de chaleur générée par les pertes visqueuses dans l'empilement, qui s'écrit, par unité de volume,

$$Q_v = \frac{1}{y_0} \int_0^{y_0} \frac{1}{T} \int_0^T \mu \left( \frac{\partial v_x(x,y,t)}{\partial y} \right)^2 dt dy, \quad (5)$$

où  $\mu$  est le coefficient de viscosité du fluide, et iv – le flux de chaleur par conduction retour dans les plaques de l'empilement et dans le fluide, qui s'écrit, par unité de surface,

$$Q_c = -K_{eq} \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad (6)$$

où  $K_{eq} = \frac{(2y_0 K + 2e_s K_s)}{2(y_0 + e_s)}$  est un coefficient effectif de conduction thermique, avec  $K$  le coefficient de conduction thermique du fluide et  $K_s$  celui des plaques.

Considérant un élément de l'empilement de longueur  $dx$ , le comportement thermique du système peut alors être décrit par l'équation de diffusion thermique suivante :

$$2(y_0 \rho_0 C_p + e_s \rho_s C_s) \frac{\partial \theta}{\partial t} = 2(y_0 + e_s) \left( -\frac{\partial Q_{th}}{\partial x} - \frac{\partial Q_c}{\partial x} + Q_v + s_L Q_L \right), \quad (7)$$

où  $C_p$  est la capacité calorifique massique du fluide et  $C_s$  celle des plaques, et où  $S_L = S/V$  est un facteur de forme qui dépend de la géométrie du résonateur (avec  $S$  la section du résonateur et  $V$  le volume occupé par le stack). Le report des expressions (3) à (6) dans l'équation (7), conduit à l'expression suivante de l'équation de diffusion thermique,

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = g \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \zeta_L \theta + q_v, \quad (8)$$

avec

$$g(x) = \frac{2(y_0 + e_s)}{2(y_0 \rho_0 C_p + e_s \rho_s C_s)} (K_{eq} + r(x)), \quad (9)$$

$$\zeta_L = \frac{2(y_0 + e_s)}{2(y_0 \rho_0 C_p + e_s \rho_s C_s)} s_L h_L, \text{ et} \quad (10)$$

$$q_v = \frac{2(y_0 + e_s)}{2(y_0 \rho_0 C_p + e_s \rho_s C_s)} \left( Q_v - \frac{\partial q(x)}{\partial x} \right). \quad (11)$$

A cette équation de diffusion thermique sont associées les conditions de continuité des flux de chaleur aux extrémités de l'empilement qui s'écrivent

$$K_{eq} \frac{\partial \theta}{\partial x} - h_{e_0} \theta = Q_{ih}(0), \quad x=0, t>0, \text{ et} \quad (12)$$

$$K_{eq} \frac{\partial \theta}{\partial x} + h_{e_\ell} \theta = Q_{ih}(\ell), \quad x=\ell, t>0, \quad (13)$$

avec  $h_{e0,\ell}$  un coefficient d'échange thermique inconnu, et la condition initiale

$$\theta(x,0) = \varphi(x), \quad x \in (0, \ell), t=0, \quad (14)$$

où  $\varphi(x)$  représente la distribution spatiale de température dans l'empilement à l'instant  $t=0$ . En résumé, le problème se réduit au système d'équations suivant

$$\frac{1}{g} \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \alpha \theta + \beta, \quad x \in (0, \ell), t>0, \quad (15)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} - \eta_0 \theta = q_0, \quad x=0, t>0, \quad (16)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} + \eta_\ell \theta = q_\ell, \quad x=\ell, t>0, \quad (17)$$

auquel s'ajoute l'équation (14), avec  $\alpha = \zeta_L / g$ ,  $\beta = q_v / g$ ,  $\eta_{0,\ell} = h_{e_{0,\ell}} / [K_{eq} + r]$ ,  $q_0 = q(0) / [K_{eq} + r]$  et  $q_\ell = q(\ell) / [K_{eq} + r]$ . Le problème aux valeurs propres associé au problème décrit ci dessus peut s'écrire sous la forme

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + k_m^2 \right) \psi_m(x) = 0, \quad x \in (0, \ell), \quad (18)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} - \eta_0 \right) \psi_m(x) = 0, \quad x=0, \quad (18)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} + \eta_\ell \right) \psi_m(x) = 0, \quad x=\ell. \quad (19)$$

Les fonctions propres  $\psi_m(x)$  solutions de ce problème ont une forme explicite connue (Ozizik, 1993). Le profil de température  $\theta(x,t)$  est alors écrit sous la forme d'un développement sur la base formée par l'ensemble de ces fonctions propres  $\psi_m(x)$ ,

$$\theta = \sum_{m=0}^{\infty} C_m(t) \psi_m(x). \quad (20)$$

Les coefficients  $C_m(t)$  sont obtenus en effectuant la projection de l'équation (15) sur la base des  $\psi_m(x)$ , qui conduit, tous calculs faits, à l'expression suivante pour le profil de température

$$\theta = - \sum_m \left( q_\ell \psi_m(\ell) - q_0 \psi_m(0) + \langle \psi_m | \beta \rangle \right) \left[ \frac{e^{-g(k_m^2 + \alpha)t} - 1}{(k_m^2 + \alpha)} \right] \psi_m(x). \quad (21)$$

Cette solution est utilisée pour décrire le comportement transitoire du prototype expérimental décrit ci dessous.

## 2 Etude expérimentale

Le dispositif expérimental utilisé est composé d'un résonateur fermé, de section carré  $S = 80 \times 80 \text{ mm}^2$  et de longueur  $L+x_0=86 \text{ cm}$ , couplé à un haut-parleur électrodynamique (Focal 4V3211) (Duffourd *et al.*, 1999). Le fluide utilisé est de l'air à pression et à température ambiantes. La fréquence de fonctionnement est  $f = 200 \text{ Hz}$ , le résonateur se comportant alors comme un résonateur demi-onde. Le niveau de pression crête atteint  $1500 \text{ Pa}$  dans le résonateur. L'empilement utilisé est un ensemble de canaux droits de section carré dont les parois sont faites de céramique (cordiérite). La longueur de l'empilement est  $\ell = 60 \text{ mm}$ , le côté d'un canal est  $2y_0 = 0.92 \text{ mm}$  et l'épaisseur des parois entre deux canaux est  $2e_s = 0.12 \text{ mm}$ . Les mesures de température sont effectuées à l'aide de treize thermocouples de type K ( $\varnothing 127 \mu\text{m}$ ) régulièrement espacés le long de l'empilement. L'évolution temporelle de la température le long de l'empilement au cours du régime transitoire d'attaque est relevée expérimentalement pour différentes positions de l'empilement dans le résonateur, et peut être comparée avec l'évolution théorique issue du modèle présenté ci dessus. A titre d'exemple, les résultats (expérimentaux et issus du modèle) présentés sur la figure 2 illustrent le cas où le centre de l'empilement est placé à  $62 \text{ cm}$  du haut-parleur dans le résonateur. Cette position ne correspond pas à celle optimale qui conduit à une différence maximale de température entre les extrémités de l'empilement, mais elle présente l'avantage de mettre clairement en évidence la compétition entre le phénomène thermoacoustique et les autres phénomènes pris en compte dans le modèle. Ainsi, dans les premières secondes qui suivent la mise en marche du haut-parleur, la température croît à une extrémité de l'empilement, tandis que celle de l'autre extrémité diminue (figure 2.a); c'est l'effet thermoacoustique attendu. Après quelques centaines de secondes, la différence de température entre les extrémités de l'empilement tend vers sa valeur limite (figure 2.b), l'effet thermoacoustique étant compensé par la conduction thermique retour dans les plaques et dans le fluide. Cependant, dans le même temps, la température de l'ensemble de l'empilement croît lentement (figure 2.a). C'est l'effet des frottements visqueux aux interfaces fluide/parois, d'autant plus important que la vitesse particulaire est grande, qui se superpose au processus thermoacoustique. Enfin, cet échauffement global tend à son tour vers une valeur limite (figure 2.a) par effet compensatoire des pertes thermiques à travers les parois du résonateur et aux extrémités de l'empilement. Les résultats expérimentaux présentés (ainsi que les résultats théoriques correspondants) sont ceux obtenus sur deux thermocouples situés à l'intérieur de l'empilement, à un centimètre de chaque extrémité afin de s'affranchir des effets de bord. L'accord entre les résultats expérimentaux et ceux issus du modèle analytique est obtenu en ajustant les coefficients d'échange thermique  $h_L$  et  $h_{e0,\ell}$  apparaissant dans les équations (4), (12) et (13), leur conférant des valeurs compatibles avec les ordres de grandeur connus. Le modèle analytique ainsi ajusté permet alors de décrire l'évolution temporelle de la distribution de la température le long de l'empilement (figure 3). Le haut parleur est mis en marche à l'instant  $t = 0$ . La distribution de température est présentée pour les instants  $t = 120\text{s}$ ,  $t = 240\text{s}$  et  $t = 900\text{s}$ . Des écarts apparaissent entre les résultats expérimentaux et ceux issus du modèle. En particulier, en régime établi ( $t = 900\text{s}$ ), les températures théoriques aux extrémités de l'empilement sont sous estimées. Il semble que les phénomènes qui prennent place aux extrémités de l'empilement (génération de vortex, pertes de charges) peuvent être responsables d'un échauffement supplémentaire non pris en compte dans le modèle.

## 4 Conclusions

Après ajustement des coefficients d'échange thermique  $h_L$  et  $h_{e0,ts}$  dont les valeurs pour le système étudié sont inaccessibles à l'expérience (seuls les ordres de grandeurs sont connus et respectés ici), le modèle analytique présenté permet de décrire et d'interpréter le comportement transitoire d'un réfrigérateur thermoacoustique. En particulier, les rôles respectifs des différents phénomènes physiques mis en jeu, tels que le flux de chaleur thermoacoustique, le flux de chaleur par conduction retour dans l'empilement, les pertes thermiques à travers le système et les pertes visqueuses dans l'empilement, sont clairement identifiés. Reste que les effets thermiques associés aux phénomènes non linéaires qui se développent aux extrémités de l'empilement doivent être pris en compte pour décrire correctement le comportement transitoire d'un réfrigérateur thermoacoustique.

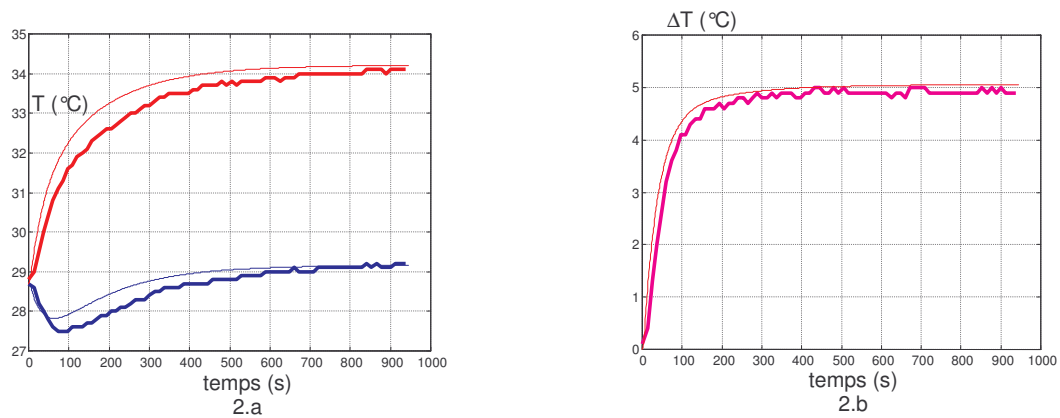


Fig. 2 : Evolution temporelle de la température dans l'empilement, à un centimètre de l'extrémité chaude, et à un centimètre de l'extrémité froide (Fig 2.a) - Evolution temporelle de la différence de ces températures (Fig 2.b) - traits gras : relevés expérimentaux, traits fins : résultats issus du modèle

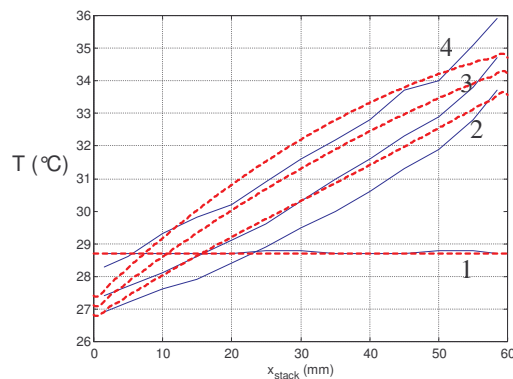


Fig. 3 : Evolution temporelle de la distribution de température le long de l'empilement  
(1)  $t = 0s$ , (2)  $t = 120s$ , (3)  $t = 240s$ , (4)  $t = 900s$   
traits continus : relevés expérimentaux, traits tiretés : résultats issus du modèle

## Références

- Duffourd, S. & Blanc-Benon, Ph. 1999 14<sup>ème</sup> Congrès Français de Mécanique, Toulouse.  
 Osisik, M. N., 1993 Heat conduction, *John Wiley and sons, Inc* (2<sup>d</sup> edition)  
 Swift, G. W. 1998 Thermoacoustic engines. *J. Acoust. Soc. Am.* **84**, 1145-1180